數學傳播　49卷2期, pp. 113-117

沙發轉彎問題與兩個簡易版的變化探討

薛黨鵬 · 鄭　欣

有過搬家經歷的人都有這樣的感受, 移動大型傢俱通過轉角是件不很容易的事情。也許是受此啟發, 加拿大數學家裏奧·莫澤 (Leo Moser) 在 1966 年提出了下述有趣問題。

沙發移動問題 (the Moving Sofa Problem)： 在單位寬度的走廊中, 可圍繞直角移動的最大面積的平面形狀是什麼?

1. 通過拐角的最大沙發

一般意義上的沙發移動問題看似簡單, 徹底解決卻極為困難。為方便起見, 數學家把繞過直角走廊的沙發截面積稱為“沙發常數” (sofa constant)。

當沙發截面為直徑是 1 的半圓 (在直轉角處, 可繞直拐角頂點旋轉通過) 時, 沙發常數 $s_1=\dfrac{\pi}{2}=1.570796\cdots$ 顯然, 這不是最優的沙發常數。因為半圓形沙發在拐角處轉動時, 還存在一定的“區域浪費”。據此我們設想, 能否把半圓形沙發“拉長些”, 然後在其中間的下方挖去一個半圓, 以便在直拐角頂點“繞著”半圓轉動的過程中能讓沙發順利通過拐角 (圖1)。

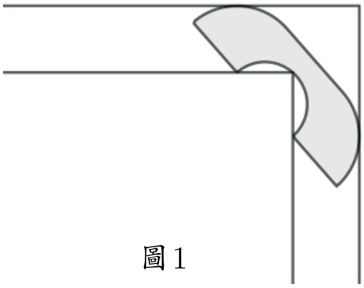

圖1

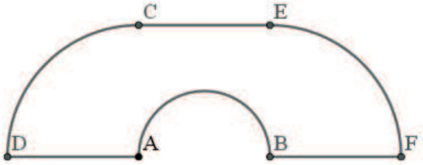

圖2

如圖 2 所示, 此時的沙發形狀類似於老式電話筒。它的兩側是半徑為 1 的四分之一圓, 中間為挖去半圓的矩形。我們設挖去的半圓半徑為 r, 則矩形的相鄰兩邊長分別為 $2r$ 和 1。於是沙發面積為

$$s=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 1^2+2r\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r^2=-\frac{\pi}{2}r^2+2r+\frac{\pi}{2}.$$

s 爲 r 的二次函數, 易知, 當 $r=\dfrac{2}{\pi}$ 時, s 取得最大值 $s_2=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{2}{\pi}=2.207416\cdots$。顯然, 電話筒形沙發的沙發常數 s_2 較 s_1 有了很大進展, 但是 s_2 仍然不是最優沙發常數。1992 年, 數學家 Joseph Gerver 構造出了一個更大的"沙發", 其沙發常數約爲 2.2195, 將 s_2 往上又提升了0.5%。該沙發的形狀 (被稱爲 Gerver 沙發) 仍然類似於電話筒, 但其構造要比圖 3 複雜得多。它由三條線段與 18 條曲線段構成, 其中涉及到圓的漸開線等[1]。此沙發是否爲最優沙發曲線, Gerver 也不得而知, 但他表示最完美的沙發常數應該在 $2.2195\sim 2.37$ 之間。

如果沙發要連續通過兩個直角走廊, 那麼, 上述沙發在第二個拐角處都會被卡。爲了連續通過兩個直拐角, 我們考慮將圖 2 中兩側的四分之一圓弧改爲半圓, 並從中間矩形的上部、下部各挖去一個半圓, 我們就得到了一個啞鈴形沙發, 如圖 3 所示。其中 $\overset{\frown}{AC}$ 和 $\overset{\frown}{DB}$ 爲直徑是 1 的半圓, $\overset{\frown}{DC}$ 和 $\overset{\frown}{AB}$ 是半徑爲 r 的半圓。我們來探究這種沙發對應的沙發常數。

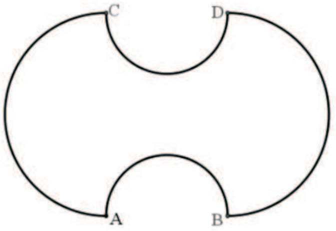

圖3

$$s'=\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+2r\cdot 1-\pi\cdot r^2=-\pi r^2+2r+\frac{\pi}{4}.$$

s' 爲 r 的二次函數, 易知, 當 $r=\dfrac{1}{\pi}$ 時, 啞鈴形沙發的面積取得最大值。於是, 這種沙發的最優沙發常數爲

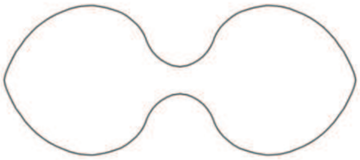
圖 4

$$s_3=-\pi\left(\frac{1}{\pi}\right)^2+2\cdot\frac{1}{\pi}+\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\pi}+\frac{\pi}{4}=1.103708\cdots.$$

很明顯, 這種啞鈴形沙發並不是可通過連續直拐彎的最優沙發。美國加州大學戴維斯分校數學系教授 Dan Romik 在 Gerver 沙發的基礎上構造出了一種眼鏡形沙發, 其形狀如圖 4。它由 16 條曲線段構成, 其中涉及到圓弧等四種類型的曲線[1]。其沙發常數 $s_4=1.644955\cdots$, 將 s_3 提高了近 50%!

特別巧合! 就在這篇短文完稿之時, 筆者從網路上得知[3], 韓國學者 Jineon Baek 發表了 1 篇包含 8 章、共計 119 頁的最新論文《*Optimality of Gerver's Sofa*》(文章地址: `https://arxiv.org/pdf/2411.19826`)。文章摘要爲"通過證明具有 18 個曲線段的沙發的確達到了最大面積 2.2195, 進而解決了移動沙發問題。"

2. 通過拐角的最長細棍

我們將問題中的"沙發"更換成"細棍", 即探求能通過拐角的細棍的最大長度。

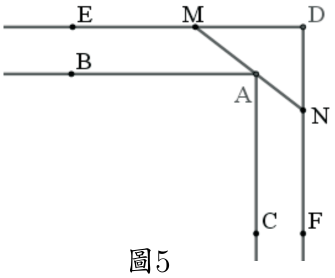

圖5

如圖 5, 不難得知, 所求細棍的最大長度, 即爲經過直拐角內頂點 A, 且端點分別落在 ED 和 DF上的線段 MN 長度的最小值。

我們設 $\angle MAB = x$, 則線段 MN 的長度

$$
\begin{aligned}
|MN| &= |MA| + |NA| = f(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \\
&= 2\left(\frac{2}{\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}}\right)^{-1} \geq 2\left(\sqrt{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{2}}\right)^{-1} = 2\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

其中, 等號取到的條件爲 $\sin x = \cos x$。這裡, 用到了不等式 $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} \leq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ $(a, b > 0)$。所以, 通過單位寬度直拐角的最長細棍的長度爲 $2\sqrt{2}$。

如果拐角不是直角, 則情況如何呢? 如圖 6, 我們設拐角的夾角爲 α。則 $\angle MAB$ 和 $\angle NAC$ 的平均值爲 $\beta = \dfrac{\pi-\alpha}{2}$。於是, 我們可設 $\angle MAB = \beta + x$, 則 $\angle NAC = \beta - x$。從而, 經過點 A, 且聯結 EF、FD 上兩點的線段 MN 的長度

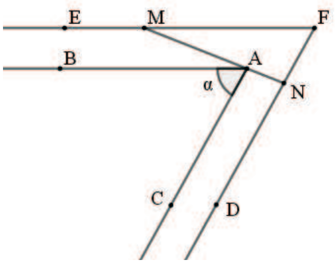

圖 6

$$
\begin{aligned}
|MN| &= |MA| + |NA| = \frac{1}{\sin(\beta+x)} + \frac{1}{\sin(\beta-x)} \\
&= \frac{\sin(\beta+x)+\sin(\beta-x)}{\sin(\beta+x)\sin(\beta-x)} = \frac{2\sin\beta\cos x}{\sin^2\beta\cos^2 x - \cos^2\beta\sin^2 x} \\
&= \frac{2\sin\beta\cos x}{\cos^2 x - \cos^2\beta} = \frac{2\sin\beta}{\cos x - \dfrac{\cos^2\beta}{\cos x}}
\end{aligned}
$$

由函數 $y = x - \dfrac{a}{x}$ $(a > 0)$ 的單調性可知, 當 $\cos x = 1$, 即 $x = 0$ 時,

$$
L_{\min} = \frac{2}{\sin\beta} = \frac{2}{\sin\dfrac{\pi-\alpha}{2}} = \frac{2}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}.
$$

特殊的, 當 $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ 時, $L_{\min} = \dfrac{2}{\cos\dfrac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}$, 與前述討論一致。至此, 我們有下述結論。

定理: 若單位寬度的拐角夾角爲 α, 則可通過此拐角的細棍最大長度爲 $2\csc\dfrac{\alpha}{2}$。

3. 通過拐角的最大矩形

我們討論可以通過單位寬度拐角的最大矩形。如圖 7, 設拐角的角度爲 α, 我們研究一邊架在 A 上, 且對邊兩個端點分別落在 EF、DF 上的矩形 $MNPQ$ 面積的最小值。我們設矩形的一邊 $|MQ| = a$, 令 $\beta = \dfrac{\pi-\alpha}{2}$, $\angle QAB = \beta + x$, 則 $\angle PAC = \beta - x$, 於是

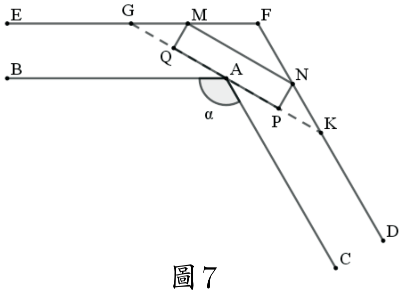

圖 7

$$\begin{aligned} b &= |MN| = |PQ| = |GA| + |KA| - |GQ| - |KP| \\ &= \frac{1}{\sin(\beta+x)} + \frac{1}{\sin(\beta-x)} - a\cot(\beta+x) - a\cot(\beta-x) \\ &= \frac{\sin(\beta+x)+\sin(\beta-x)-a[\sin(\beta+x)\cos(\beta-x)+\cos(\beta+x)\sin(\beta-x)]}{\sin(\beta+x)\sin(\beta-x)} \\ &= \frac{2\sin\beta\cos x - 2a\sin\beta\cos\beta}{\cos^2 x - \cos^2\beta} = \frac{2\sin\beta[\cos x - \cos\beta + (1-a)\cos\beta]}{\cos^2 x - \cos^2\beta} \\ &= 2\sin\beta\Big[\frac{1}{\cos x + \cos\beta} + \frac{(1-a)\cos\beta}{\cos^2 x - \cos^2\beta}\Big]. \end{aligned}$$

注意到 $0 < a < 1$, 由此可知, 當 $\cos x = 1$, 即 $x = 0$ 時,

$$|MN|_{\min} = \frac{2\sin\beta - 2a\sin\beta\cos\beta}{1-\cos^2\beta} = \frac{2-2a\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{2-2a\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

這即爲可以通過拐角的矩形另一條邊長 b 的最大值, 此時, 矩形的面積

$S = ab = g(a) = \dfrac{a\Big(2-2a\sin\dfrac{\alpha}{2}\Big)}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$, S 爲 a 的二次函數, 對稱軸爲 $a = \dfrac{1}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$。注意到 $a \le 1$。於是, 若 $0 < \alpha \le \dfrac{\pi}{3}$, 則當 $a = 1$ 時, 矩形面積取得最大值

$$S_{\max} = g(1) = \frac{2-2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}};$$

若 $\dfrac{\pi}{3} < \alpha < \pi$, 則當 $a = \dfrac{1}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$ 時,

$$S_{\max} = g\Big(\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\Big) = \frac{\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}(2-1)}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

於是, 我們有下屬一般結論。

定理: 若單位寬度的拐角夾角爲 α, 則可通過此拐角的矩形的最大面積爲

$$S_{\max}=\begin{cases}2\sec\dfrac{\alpha}{2}\Big(1-\sin\dfrac{\alpha}{2}\Big), & 0<\alpha\le\dfrac{\pi}{3};\\ \csc\alpha, & \dfrac{\pi}{3}<\alpha<\pi.\end{cases}$$

數學家哈爾莫斯 (P. Halmos) 曾說, “問題是數學的心臟。” 好的問題是數學發展的源動力。好的問題也是數學學習與探究的驅動力。沙發移動問題及其變式就是一個很好的例證。

參考文獻

1. Cloudiiink。昨晚, 我在秋名山輸給了一個沙發。微信公衆號: 中科院物理所。2018-12-23。
2. 薛黨鵬。有趣的沙發移動問題。https://www.geogebra.org/m/bccdvbep.
3. 機器之心編輯部。困擾數學家近 60 年的搬沙發難題疑似被解決! https://www.163.com/dy/article/JIV9UTVO0511AQHO.html.

—本文作者任教中國陝西省西安中學—